ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

————————o0o————————

NGUYỄN CHÍ TÂM

TÍNH COHEN-MACAULAY DÃY CỦA ĐẠI SỐ REES

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————–o0o——————–

NGUYỄN CHÍ TÂM

TÍNH COHEN-MACAULAY DÃY CỦA ĐẠI SỐ REES

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS. Naoki Taniguchi

2. TS. Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 08 năm 2018
Tác giả

Nguyễn Chí Tâm

Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn	Xác nhận của tập thể hướng dẫn khoa học

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Naoki Taniguchi, trường Đại học Waseda, Tokyo, Nhật Bản và TS. Trần Nguyên An, trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến hai thầy, những bài học quý giá từ trang giấy và cả những bài học trong cuộc sống thầy dạy giúp tôi tự tin hơn và trưởng thành hơn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới tất cả các thầy cô ở Đại học Thái Nguyên, các thầy ở Viện Toán và các thầy cô đến từ Nhật Bản đã tạo điều kiện cho tôi tham gia các buổi xemina và các lớp học ngoài chương trình để tôi có thêm nhiều kiến thức quý báu.

Tôi xin được gửi cảm ơn tới tất cả thành viên trong gia đình đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho R là một vành giao hoán Noether và cho $\mathcal{F} = \{F_n\}_n$ là một họ các iđêan trong R. Khi đó ta nói $\mathcal{F}$ là một lọc của R nếu

(i) $F_0 = R$; $F_{n+1} \subseteq F_n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $F_n F_m \subseteq F_{n+m}$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ về các loại lọc mà chúng ta thường nghiên cứu đó là lọc I-adic $F_n = I^n, n \in \mathbb{N}$ với I là iđêan của R; lọc $F_n = \mathfrak{p}^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ là lọc lũy thừa hình thức của iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ trong R; lọc $F_n = \overline{I^n}, n \in \mathbb{N}$ là lọc các bao đóng nguyên của I^n; lọc $F_n = \sum_{i \geq n} R_i$ trong đó $R = \sum_{i \geq 0} R_i$ là một vành phân bậc.

Với t là một biến trên R và với mỗi lọc $\mathcal{F}$ của R ta có ba đại số phân bậc liên kết là

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n \subseteq R[t],$$

$$\mathcal{R}'(\mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n t^n = \mathcal{R}(\mathcal{F})[t^{-1}] \subseteq R[t, t^{-1}] \text{ và}$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{F})/t^{-1}\mathcal{R}(\mathcal{F})$$

và ta gọi tương ứng là *đại số Rees, đại số Rees mở rộng và vành phân bậc liên kết* của lọc $\mathcal{F}$. Khi $\mathcal{F}$ là I-adic ta thường kí hiệu các đại số bởi $\mathcal{R}(I), \mathcal{R}'(I)$ và $\mathcal{G}(I)$ tương ứng. Kết quả đầu tiên về xét tính Cohen-Macaulay của vành Rees ứng với lọc $\mathfrak{m}$-adic là của S. Goto-Y. Shimoda [13] họ đã xét trong trường hợp R là vành Cohen-Macaulay địa phương với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Ở đó họ đã khẳng định nếu $\dim R \geq 1$ thì vành Rees $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ với $\mathfrak{m}$ iđêan tối đại của R là vành Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ là Cohen-Macaulay và $a(\mathcal{G}(\mathfrak{m})) < 0$ trong đó $a(\mathcal{G}(\mathfrak{m}))$ là *a-bất biến của vành phân bậc* (theo [14]). S. Ikeda [18] mở rộng kết quả trên cho vành địa phương bất kỳ có chiều $\dim R \geq 1$. Sau đó N. V. Trung và S. Ikeda [28] tìm hiểu cho trường hợp tổng quát hơn. Cụ thể cho I là iđêan của vành Nother địa phương R, $\mathfrak{M}$ là iđêan tối đại phân bậc duy nhất của $\mathcal{R}(I)$. Khi đó nếu $\dim \mathcal{R}(I) = \dim R + 1$ thì $\mathcal{R}(I)$ là vành Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $[H^i_{\mathfrak{m}}(\mathcal{G}(I))]_n = (0)$ với mọi $i, n \in \mathbb{Z}, i \neq \dim R, n \neq -1$ và $a(\mathcal{G}(I)) < 0$. Tính Cohen-Macaulay của các đại số ứng với các lọc khác cũng được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của các đại số trên. Chú ý rằng tính Cohen-Macaulay dãy lần đầu tiên được giới thiệu bởi R. P. Stanley [25] cho các môđun phân bậc hữu hạn sinh. Sau đó N. T. Cường, L. T. Nhàn [8] và P. Schelzel [24] đã nghiên cứu lớp môđun này trên vành địa phương. Tính Cohen-Macaulay dãy được định nghĩa cho môđun hữu hạn sinh trên vành Noether bất kỳ bởi S. Goto, Y. Horiuchi và H. Sakurai [11]. Lớp môđun Cohen-Macaulay dãy là mở rộng tự nhiên của lớp môđun Cohen-Macaulay. Việc nghiên cứu lớp môđun Cohen-Macaulay dãy đóng vai trò rất quan trọng trong Đại số giao hoán, Hình học đại số, Đại số tổ hợp, đặc biệt trong việc nghiên cứu vành Stanley-Reiner. Cấu trúc của môđun Cohen-Macaulay dãy được nghiên cứu khá rõ thông qua đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic, địa phương hoá, đặc trưng đồng điều [25, 8, 24, 16] và hệ tham số tốt, hệ tham số dd-dãy [6]. Tính Cohen-Macaulay dãy của đại số Rees ứng với lọc I-adic trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ được nghiên cứu trong [7], trong đó I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Trong [26] các tác giả mở rộng nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của các đại số Rees ứng với lọc tổng quát hơn.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu vành lọc, các đại số Rees và tính Cohen-Macaulay dãy của các đại số Rees. Việc tìm hiểu chi tiết một số tính chất của môđun Cohen-Macaulay dãy cũng là một mục đích khác của luận văn. Luận văn tham khảo chính theo các tài liệu [26], [27], [11], [5], [8], [19].

Luận văn được bố cục làm hai chương. Chương 1 trình bày về vành lọc và tính Noether của vành lọc. Chương 2 trình bày về lọc chiều, môđun Cohen-Macaulay và môđun Cohen-Macaulay dãy, tính Cohen- Macaulay dãy của đại số Rees.

Chương 1

Vành lọc và tính Noether của vành lọc

Ở chương này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán có đơn vị và M là R-môđun. Một số kiến thức cần thiết chưa được nêu trong luận văn có thể tham khảo trong [16],[20], [21]. Chương này tham khảo theo [2], [17], [19].

1.1 Vành lọc

Trong mục này ta sẽ giới thiệu về vành Rees, vành Rees mở rộng và vành phân bậc liên kết của một vành lọc.

Định nghĩa 1.1.1. Cho R là một vành và $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là một họ các iđêan của R. Dãy $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ được gọi là *một lọc các iđêan* của R nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $F_0 = R$, $F_{n+1} \subseteq F_n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $F_nF_m \subseteq F_{n+m}$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Một *vành lọc* là cặp $(R, \mathcal{F})$ trong đó R là vành và $\mathcal{F}$ là một lọc trên R.

Ví dụ 1.1.2. Cho I là một iđêan của vành R và đặt $F_n = I^n$. Khi đó ta có lọc

$$R = I^0 \supseteq I^1 \supseteq I^2 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq \ldots$$

Lọc này được gọi là *lọc lũy thừa* hay *lọc I-adic*.

Ví dụ 1.1.3. Cho $R = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc. Đặt $F_n = \sum\limits_{i\geq n} R_i$ thì $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là lọc các iđêan của R.

Định nghĩa 1.1.4. Cho R là một vành và $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố của R. Khi đó lũy thừa hình thức bậc n của $\mathfrak{p}$, ký hiệu là $\mathfrak{p}^{(n)}$ được định nghĩa là $\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R, n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 1.1.5. Cho $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố của vành R. Khi đó với mọi $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p}^n.\mathfrak{p}^m \subseteq \mathfrak{p}^{m+n}$. Từ đó suy ra $\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}.\mathfrak{p}^m R_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}^{m+n} R_{\mathfrak{p}}$. Do đó $(\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R).(\mathfrak{p}^m R_{\mathfrak{p}} \cap R) \subseteq \mathfrak{p}^{m+n} R_{\mathfrak{p}} \cap R$ hay $\mathfrak{p}^{(n)}.\mathfrak{p}^{(m)} \subseteq \mathfrak{p}^{(n+m)}$ và như vậy $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_n$ là một lọc.

Tiếp theo ta xét một ví dụ về lọc các iđêan của vành đa thức $\mathrm{k}[x]$ với k là một trường.

Ví dụ 1.1.6. Cho $F_n = (x^{\lceil \sqrt{n} \rceil}), n \in \mathbb{N}$ là một họ các iđêan trong $\mathrm{k}[x]$ với ký hiệu $\lceil \sqrt{n} \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$. Ta chứng minh $\{F_n\}$ là một lọc các iđêan của $\mathrm{k}[x]$. Trước hết, ta chứng minh $\lceil \sqrt{m+n} \rceil \leq \lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil$. Rõ ràng ta có $\lceil \sqrt{m+n} \rceil \leq \lceil \sqrt{m} + \sqrt{n} \rceil$. Khi đó

$$\sqrt{m+n} \leq \sqrt{m} + \sqrt{n} \leq \lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil .$$

Vì $\lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil \in \mathbb{N}$ nên $\lceil \lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil \rceil = \lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil$. Do đó $\lceil \sqrt{m+n} \rceil \leq \lceil \sqrt{m} \rceil + \lceil \sqrt{n} \rceil$. Ta có điều kiện (ii) trong định nghĩa lọc là thỏa mãn. Hiển nhiên điều kiện (i) của định nghĩa luôn thỏa mãn. Do vậy $\{F_n\}$ là lọc các iđêan của R.

Định nghĩa 1.1.7. Cho vành lọc $(R, \mathcal{F})$, với lọc $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và M là R-môđun. Một *lọc các môđun con* của M là họ $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ các môđun con của M thỏa mãn $M_0 = M$ và $M_{n+1} \subseteq M_n$. Lọc $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ được gọi là *tương thích* với lọc $\mathcal{F}$ hay $\mathcal{F}$-lọc nếu $F_m M_n \subseteq M_{m+n}$, với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1.1.8. Cho $R = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc và $M = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} G_n$ là R-môđun phân bậc. Đặt $M_n = \sum\limits_{i\geq n} G_i$, khi đó $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là một *$\mathcal{F}$-lọc* của M,với $\mathcal{F} = \{F_n\}$ như trong Ví dụ 1.1.3.

Ví dụ 1.1.9. Cho $(R, \mathcal{F})$ là vành lọc với lọc $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ và M là R-môđun. Đặt $M_n = F_n M$. Khi đó $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là $\mathcal{F}$-lọc.

Cho R là một vành lọc với lọc $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Ta định nghĩa đại số Rees của R tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ bởi

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\geq 0} F_n t^n.$$

Khi đó $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ được xem như một vành con của vành $R[t]$. Ta cũng định nghĩa đại số Rees mở rộng của R tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ bởi

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n t^n.$$

Khi đó $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ được xem như một vành con của vành $R[t, t^{-1}]$. Ngoài ra, ta định nghĩa vành phân bậc liên kết của R tương ứng với lọc $\mathcal{F}$ bởi

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n/F_{n+1}.$$

Nó là một vành phân bậc với phép nhân cảm sinh bởi phép nhân ánh xạ $F_m \times F_n \longrightarrow F_{m+n}$.

Cho M là R-môđun, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ là $\mathcal{F}$-lọc các môđun con của M. Đặt

$$\mathcal{R}(M) = \sum_{n\geq 0} t^n \otimes M_n \subseteq R[t] \otimes_R M$$

$$\mathcal{R}'(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \otimes M_n \subseteq R[t, t^{-1}] \otimes_R M$$

$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{R}'(M)/t^{-1}\mathcal{R}(M)$$

được gọi là môđun Rees, môđun Rees mở rộng và môđun phân bậc liên kết của M. Chú ý, đôi khi để đơn giản ta cũng viết $\mathcal{R}(M) = \sum\limits_{n\geq 0} M_n t^n$ và $\mathcal{R}'(M) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} M_n t^n$.

Ta xét trường hợp đặc biệt, giả sử vành R là vành giao hoán, $I \subseteq R$ là iđêan và M là R-môđun. Khi đó ta ký hiệu vành Rees, vành Rees mở rộng và vành phân bậc liên kết ứng với lọc $\{I^n M\}_{n\in\mathbb{Z}}$ bởi

$$\mathcal{R}(I, M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (I^n M) t^n$$

và

$$\mathcal{R}'(I, M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I^n M) t^n$$

$$\mathcal{G}(I, M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n M/I^{n+1} M.$$

Ta sử dụng quy ước $I^n = R$ nếu $n \leq 0$ và xét $\mathcal{R}(I, M)$ và $\mathcal{R}'(I, M)$ là nhóm con của

$$M[t, t^{-1}] = M \otimes_R R[t, t^{-1}]$$